Саратовский государственный университет
имени Н.Г.Чернышевского

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП XLVI ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

в г. Саратове

Задания и решения

Саратов
2011 г

Комплект заданий подготовлен методической комиссией по физике

Контакты для связи (Савин Алексей Владимирович):
E-mail: AVSavin@rambler.ru с пометкой «Олимпиада» в теме письма
Адрес: 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83, СГУ, ФНП, Савину А.В.

Авторы задач

7 класс	8 класс	9 класс	10 класс	11 класс
1. В.Н. Шевцов 2. А.А. Князев 3. А.А. Князев	1. В.Н. Шевцов 2. В.Н. Шевцов 3. М.М. Стольниц 4. А.А. Князев	1. А.А. Князев 2. А.А. Князев 3. М.И. Перченко 4. А.А. Князев 5. А.А. Князев	1. М.И. Перченко 2. А.А. Князев 3. М.М. Стольниц 4. В.Н. Шевцов 5. А.А. Князев	1. М.Н. Куликов 2. А.А. Князев 3. А.А. Князев 4. М.Н. Куликов 5. А.В. Савин, В.Н. Шевцов

Председатель методической комиссии: С.Б. Вениг.

Члены методической комиссии: В.П. Вешнев, А.А. Князев, М.Н. Куликов, М.Д. Матасов, М.И. Перченко, А.В. Савин (зам. председателя), Д.В. Савин, М.М. Стольниц, В.Н. Шевцов.

Общая редакция – А.В. Савин

Подготовка оригинал-макета – А.В. Савин, Д.В. Савин

Редакция вторая,
исправленная и дополненная по результатам проведения олимпиады

© Авторский коллектив, 2011 г
Подписано в печать 16 декабря 2011 г. в 22.50.

Условия задач

7 класс

1. «Догонялки»

При равномерном движении двух тел навстречу друг другу расстояние между ними уменьшается на 16 м каждые 10 с. При движении этих же тел с прежними скоростями в одном направлении расстояние между ними увеличивается на 3 м каждые 5 с. Определите скорость каждого тела.

2. «Вяленая рыба»

При вялении свежей рыбы содержание влаги в ней падает с 75% до 60% (по массе). Сколько будут весить 2 кг свежей рыбы после завяливания?

3. «Нанокрасители»

Лакокрасочная мануфактура Тридевятого царства выпускала краситель «серобуромалин» в виде кубических кристаллов, каждый из которых содержал 1 млрд молекул. В результате модернизации производства был разработан новый краситель «наносеробуромалин», отличающийся от старого лишь тем, что каждый его кристалл содержит только 27 молекул. При сравнительных испытаниях в один стакан воды положили один кристалл красителя «серобуромалин», а в другой – кристаллы красителя «наносеробуромалин» такой же общей массы. Через 1 секунду в воде первого стакана было примерно 6 млн молекул красителя. Оцените, сколько молекул красителя было через это же время в воде второго стакана. Считайте, что в раствор переходят только молекулы, находящиеся на поверхности кристалла, а температура воды в стаканах одинакова.

8 класс

1. «Новый двигатель»

Лодка с подвесным мотором проходит по течению реки расстояние между двумя деревнями за 1 ч. С более мощным мотором скорость этой лодки относительно воды увеличивается вдвое и она преодолевает тот же маршрут за 45 мин. Найдите отношение скорости течения реки к первоначальной скорости лодки.

2. «Шайба с маслом»

В воде плавает кольцевая шайба (на рис. 1 – вид сверху). Какой должна быть плотность материала шайбы, чтобы её можно было целиком заполнить маслом плотностью 800 кг/м^3? Плотность воды 1000 кг/м^3.

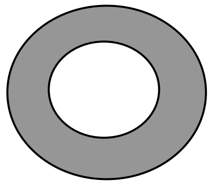

Рис. 1

3. «Водяной бак для космической станции»

Макет водяного бака для космической станции представляет собой теплоизолированный тор («бублик»), разделённый герметичными теплоизолирующими перегородками на 30 одинаковых отсеков, каждый из которых заполнен 10 кг воды при температуре 60°C (см. рис. 2). При испытаниях для имитации тепловых нагрузок в космических условиях отсеку № 1 сообщили количество теплоты Q_1, отсеку №2 сообщили количество теплоты $2Q_1$, отсеку №3 сообщили количество теплоты $4Q_1$, отсеку №4 – $8Q_1$ и т.д до отсека №16 включительно. Одновременно у отсека №30 забрали количество теплоты Q_1, у отсека №29 забрали количество теплоты $2Q_1$, и т.д до отсека №17 включительно, Q_1= 1 кДж. Достаточно быстро в отсеках установилось тепловое равновесие, однако через некоторое время после завершения процесса теплоизолирующие свойства перегородки между отсеками 16 и 17 ухудшились (хотя она осталась герметичной), и вскоре между содержимым этих отсеков вновь установилось состояние теплового равновесия. Каковы температура воды в отсеках 16 и 17 а) до утраты перегородкой теплоизолирующих свойств; б) после установления нового теплового равновесия. Табличные данные: удельные теплоёмкости воды 4200 Дж/(кг·ºC), льда 1360 Дж/(кг·ºC), пара 2130 Дж/(кг·ºC); удельная теплота плавления льда 332 кДж/кг,

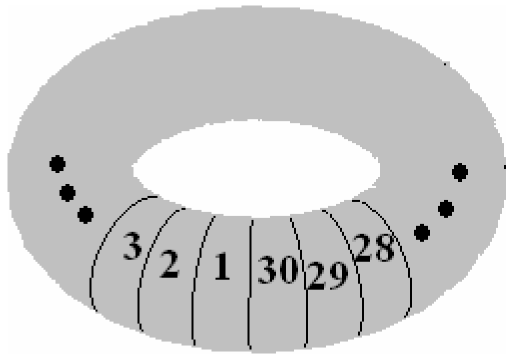

Рис. 2

удельная теплота парообразования 2,26 МДж/кг. Теплоемкость стенок и перегородок бака пренебрежимо мала. Считайте, что все фазовые переходы происходят при тех же температурах, что и при атмосферном давлении.

4. «Нанокрасители»

Лакокрасочная мануфактура Тридевятого царства выпускала краситель «серобуромалин» в виде кубических кристаллов, каждый из которых содержал 1 млрд молекул. В результате модернизации производства был разработан новый краситель «наносеробуромалин», отличающийся от старого лишь тем, что каждый его кристалл содержит только 27 молекул. При сравнительных испытаниях в один стакан воды положили один кристалл красителя «серобуромалин», а в другой – кристаллы красителя «наносеробуромалин» такой же общей массы. Через 1 секунду в воде первого стакана было примерно 6 млн молекул красителя. Оцените, сколько молекул красителя было через это же время в воде второго стакана. Считайте, что в раствор переходят только молекулы, находящиеся на поверхности кристалла, а температура воды в стаканах одинакова.

9 класс

1. «Вид на тракторы с птичьего полета»

Два трактора движутся в поле параллельными курсами со скоростями 5 м/с и 10 м/с. Определите угол пересечения их траекторий «с точки зрения» пилота вертолета, летящего перпендикулярно их курсам со скоростью 50 м/с?

Указание: если угол мал, то можно считать, что синус и тангенс этого угла примерно равны ему самому, выраженному в радианах.

2. «Неточная формулировка»

В сети Интернет школьники нашли такую формулировку закона Архимеда «*На тело, погружённое в жидкость (или газ), действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной этим телом жидкости (или газа), называемая силой Архимеда*». Решив проверить его экспериментально, они в высокую пробирку с внутренним диаметром 18 мм налили слой воды высотой 35 мм, а затем опустили в нее другую, пустую стеклянную пробирку с внешним диаметром 16 мм. В результате пустая пробирка стала плавать, почти касаясь дна, и оказалась погруженной в воду на 115 мм. Определите, во сколько раз вес воды, вытесненной внутренней пробиркой, оказался меньше силы Архимеда, и объясните это «противоречие».

Указание: объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

3. «Подтекающий самовар»

Проводник поезда, наполнив стаканы остатками кипятка из электрического самовара, вновь залил в него 5 литров воды температурой 20ºС, включил нагрев и пошел разносить чай пассажирам. Вернувшись, он обнаружил, что вода как раз закипает, однако кран самовара был закрыт не до конца, и все время его отсутствия вода вытекала в поддон. Перекрыв кран, проводник по объему вытекшей воды и времени своего отсутствия определил, что течь составляла 1 мл/с. Предполагая, что температура воды в нагревателе увеличивалась равномерно, определите время, в течение которого проводник разносил чай, а также объем оставшейся в самоваре воды, если мощность нагревательного элемента 3 кВт, а потерями тепла, не связанными с течью, можно пренебречь. Удельная теплоемкость воды 4190 Дж/(кг·ºС)

4. «Расчет цепи»

В представленной на рис.3 цепи сопротивления резисторов R вдвое больше сопротивлений резисторов r, при этом общее сопротивление цепи R_0 равно 13,75 кОм. При ее подключении к источнику постоянного напряжения вольтметр показал 2,9 В. Определите показания амперметра, считая приборы идеальными.

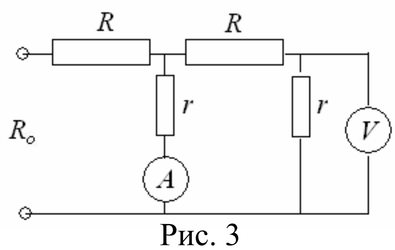

Рис. 3

5. «Формула Мия»

Иногда физиологам необходимо знать примерную площадь поверхности тела среднего человека. Для этой цели существует несколько эмпирических формул (полученных на основании рассуждений и уточненных опытными проверками), связывающих площадь с массой, ростом и т.п. Получите формулу, позволяющую по массе человека приближенно определить площадь поверхности его тела. Известно, что площадь человека с массой 60 кг примерно равна 1,6 м^2; при массе 70 кг она составляет 1,8 м^2; а при массе 80 кг – 2 м^2.

10 класс

1. «Корректировка курса»

На высоте 1000 км горизонтальная скорость движущейся с выключенными двигателями баллистической ракеты составила 6 км/с, а вертикальная была равна нулю. Через 240 секунд после этого по команде бортового компьютера включился двигатель, проработавший 100 с и обеспечивавший во время работы постоянное горизонтальное ускорение 10 м/с^2 в направлении движения ракеты (вертикальная составляющая ускорения отсутствовала). На сколько увеличилась дальность полета ракеты в результате включения двигателя? Сопротивлением воздуха и кривизной поверхности Земли пренебречь.

Указание: при падении с высоты 1000 км величина ускорения свободного падения будет существенно меняться. Поскольку точный расчет траектории в этом случае выходит за рамки школьной программы, рекомендуем Вам считать, что движение происходит с постоянным вертикальным ускорением g=7,7 м/с^2

2. «Вращающийся крюк»

Жесткая спица длиной L с грузом m на одном из концов жестко прикреплена другим концом к прочному вертикальному вращающемуся валу и составляет с ним угол α (рис. 4). Найдите зависимость отгибающей (направленной перпендикулярно спице) силы, действующей на ее конец около шарика, от частоты вращения вала. При какой частоте вращения на спицу будет действовать только растягивающая (направленная вдоль спицы) сила?

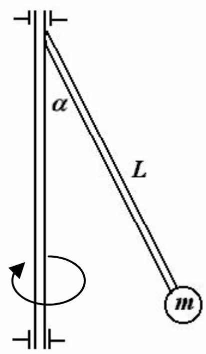

Рис. 4

3. «Теплошахматы»

Экспериментальная установка представляет собой куб, разделенный теплоизолирующими стенками на 64 одинаковых отсека, каждый из которых заполнен 2,5 кг воды при температуре 50ºC. Далее будем нумеровать отсеки как клетки шахматной доски. В процессе эксперимента отсеку А1 сообщают 1мДж энергии, а у отсека В1 забирают 1 мДж энергии. Эту процедуру проводят со всеми клетками доски, обходя их в порядке A1-B1-...-H1-H2-G2-..-A2-A3-…-A8 (рис. 5), однако с каждой парой клеток количество сообщаемой/забираемой теплоты удваивается. Определите наборы «клеток», у которых температура отличается меньше, чем на 2°C. Укажите агрегатное со-

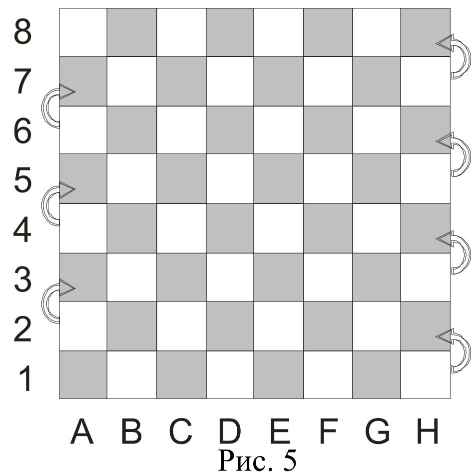

Рис. 5

стояние воды в каждой «клетке», а также максимальную и минимальную температуру воды и «клетки», в которых они достигаются. Удельные теплоемкости воды 4200 Дж/(кг·К), льда 1360 Дж/(кг·К), пара при данных условиях 2130 Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $3{,}32 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплота парообразования $2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг. Теплоемкостью стенок пренебречь, перегретая и переохлажденная вода образовываться не может.

Примечание: термин «вода» в вопросе данной задачи понимается в химическом смысле, т.е. лед и пар также считаются водой.

4. «Пара вольтметров»

Вольтметр, подключенный к источнику постоянного напряжения через некоторое неизвестное сопротивление (рис. 6), показывает 10 В. Если *параллельно к этому вольтметру* присоединить второй такой же вольтметр, то показания каждого из приборов составят 8 В. Каково напряжение источника?

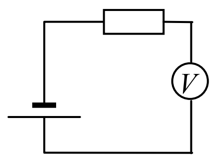

Рис. 6

5. «Сближающиеся зеркала»

Посередине между двумя параллельными плоскими зеркалами установлен источник света. С какой скоростью нужно перемещать каждое из зеркал, чтобы первые (наиболее близкие к поверхности зéркала) изображения источника сближались со скоростью 5 см/с?

11 класс

1. «Неожиданное препятствие»

Однородный брусок длины l, скользящий по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью v_0, въезжает на шероховатый участок, имеющий протяженность L в направлении движения бруска. Определите скорость бруска после преодоления этого участка. При какой скорости v_0 брусок не сможет преодолеть его? Коэффициент трения скольжения бруска о шероховатый участок μ.

2. « “Изохорный” процесс »

На диаграмме (p,T) приведен вид некоторого процесса, проведенного с идеальным одноатомным газом (рис. 7). Изобразите график процесса 1-2-3-1 на диаграмме (p,V) и рассчитайте изменение внутренней энергии газа в этом процессе, если известно, что на участке 1-2 объем содержащего газ сосуда не изменялся, первоначальное количество газа равно 2 моль, а в процессах 2-3 и 3-1 количество газа не менялось. Температуру T_0 считайте известной.

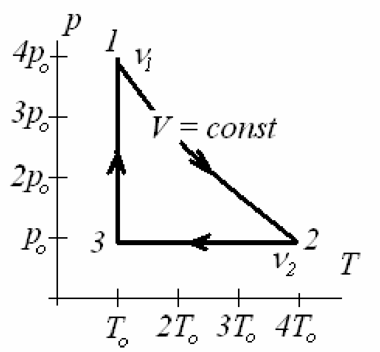

Рис. 7

3. «Четыре заряда»

Четыре маленьких стеклянных бусинки нанизаны на гладкий непроводящий стержень и соединены между собой в цепочку двумя одинаковыми нитями длины L каждая и одной пружиной жесткостью k, длина которой в нерастянутом состоянии также равна L (рис. 8). Оцените силу натяжения пружины после того, как шарикам сообщили одноименные заряды Q, $2Q$, $3Q$ и $4Q$ соответственно, если известно, что $kL = 200F_0$, где $F_0 = \dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2}$ =10 Н.

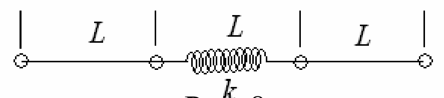

Рис. 8

Примечание: рекомендуется использовать известное соотношение $\dfrac{1}{(1+\alpha)^n} \approx 1 - n\alpha$, справедливое при $\alpha \ll 1$.

4. «Неидеальные вольтметры»

В приведенной на рис. 9 цепи все вольтметры одинаковые и все резисторы одинаковые. Определите показания второго вольтметра, если первый показывает 10,0 В, а третий 8,0 В.

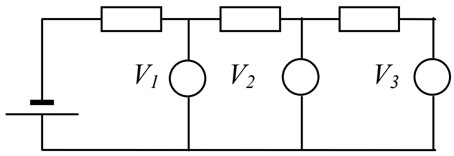

Рис. 9

5. «Квадрат и его изображение»

Перед идеальной собирающей линзой с фокусным расстоянием F расположен квадрат со стороной F так, что его центр находится на главной оптической оси на расстоянии $2F$ от линзы, а две стороны параллельны главной оптической оси. Постройте изображение квадрата в линзе и определите, во сколько раз его площадь больше площади самого квадрата.

Решения задач

7 класс

1. Если v_1 и v_2 – скорости первого и второго тел, то они удовлетворяют системе уравнений $v_1+v_2=16/10$; $v_1–v_2=3/5$. Решая ее, получаем $v_1=1,1$ м/с, $v_2=0,5$ м/с.

Ответ: 1,1 м/с, 0,5 м/с.

2. Пусть M_1 = 2 кг – масса свежей рыбы, M_2 – масса вяленой рыбы, m – масса сухого вещества в 2 кг свежей рыбы. Тогда выполняются следующие соотношения:

$$M_1 = 0,75M_1 + m,$$
$$M_2 = 0,6M_2 + m.$$

Отсюда $M_2 = M_1 \dfrac{0,25}{0,4}$=1,25 кг.

Ответ: 1,25 кг.

3. Если кубик кристалла «обычного» красителя содержит 1млрд. (10^9) молекул, то вдоль каждого его ребра укладывается 1000 молекул красителя, поэтому на поверхности кристалла находится 1000×1000×6=6 млн. молекул. По условию задачи, именно столько молекул перешло в раствор за 1 с, следовательно, за это время растворился как раз поверхностный слой молекул. Т.к. условия растворения одинаковы в обоих стаканах, то и с кристаллов «нано» красителя растворится тоже поверхностный слой молекул.

Однако кристалл, состоящий из 27 молекул, имеет ребро 3 молекулы, поэтому у него все молекулы (кроме центральной) поверхностные, и за 1 с он полностью растворится. Таким образом, в воде второго стакана через 1 с окажутся все молекулы красителя, т.е. 1млрд молекул.

Ответ: 1 млрд. молекул

8 класс

1. Пусть v – скорость лодки относительно воды, u – скорость течения, t_1 и t_2 – время в пути в первом и втором случаях, l – расстояние между деревнями. Тогда

$$\begin{cases}(v+u)\cdot t_1 = l,\\ (2v+u)\cdot t_2 = l.\end{cases} \quad \begin{cases}\left(1+\dfrac{u}{v}\right)\cdot t_1 = \dfrac{l}{v},\\ \left(2+\dfrac{u}{v}\right)\cdot t_2 = \dfrac{l}{v}.\end{cases} \quad \frac{u}{v}(t_1 - t_2) = 2\cdot t_2 - t_1$$

Отсюда получаем $u/v=2$.

Ответ: скорость течения реки в 2 раза больше.

2. Требуемая ситуация изображена на рис. 10, там же виден смысл обозначений (ΔS – площадь кольца, служащего основанием шайбы).

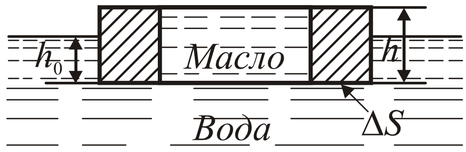

Рис. 10

Чтобы изображенная ситуация реализовалась, необходимо, чтобы

а) сила гидростатического давления на нижнюю поверхность шайбы была равна силе тяжести, действующей на шайбу

б) гидростатическое давление масла на границе раздела с водой было равно гидростатическому давлению воды на этой же границе.

Условие а) означает, что $\rho_0\Delta Shg=\rho\Delta Sh_0g$, а условие б) – что $\rho_1hg=\rho h_0g$, где ρ, ρ_0 и ρ_1 – плотности воды, шайбы и масла соответственно. Из этих условий видно, что $\rho_0=\rho_1$, т.е. плотность шайбы должна совпадать с плотностью масла.

Ответ: 800 кг/м^3

Рекомендация для проверяющих: если кому-то из участников удастся прийти к правильному ответу при помощи корректных логических рассуждений (без вычислений), необходимо оценивать его решение полным баллом.

3. Определим, при какой температуре и в каком состоянии будет находиться вода в 16-м и 17-м отсеках, пока перегородка между ними остается теплоизолирующей.

Отсеками с 1 по 16-й сообщают количество теплоты $Q_n=2^{n-1}Q_1$ (n – номер отсека), соответственно, 16-му отсеку сообщили 2^{15}=32768 кДж. Чтобы нагреть воду в этом отсеке до 100ºС, необходимо сообщить ей количество теплоты 10кг· 4200 Дж/(кг·ºС) ·(100ºС–60ºС)=1680 кДж, чтобы испарить всю воду – еще 22600 кДж. Таким образом, оставшиеся Q'=8488 кДж энергии пойдут на нагрев образовавшегося пара. Из уравнения теплового баланса $Q'=c_{\text{пара}}m(t_{16}–100ºС)$ находим температуру пара в 16-м отсеке $t_{16}\approx500ºС$.

Аналогично проводим расчет для 17-го отсека. У отсеков с 17-го по 30-й отнимают количество тепла $Q_m=2^{30-m}Q_1$, в частности, у 17-го – $Q_{17}=2^{13}$=8192 кДж. Для охлаждения воды до 0ºС нужно отнять количество теплоты 10кг· 4200 Дж/(кг·ºС) ·(60ºС)=2520 кДж, для замораживания всей воды – еще 3320 кДж. После того, как у образовавшегося льда отнимут еще Q''=2352 кДж тепла, он охладится до температуры t_{17}: $Q''= c_{\text{льда}}m(–t_{17})$, $t_{17}\approx–173ºС$.

Если теперь привести 16-й и 17-й отсеки в тепловой контакт, то окажется, что содержащимся в них 20 кг воды сообщили $Q_{16}–Q_{17}$=24576 кДж. Этого хватит, чтобы нагреть всю воду до 100ºС (для этого нужно 2·1680 кДж=3360 кДж), а вот чтобы всю ее испарить – не хватит (нужно было бы еще 45200 кДж). Таким образом, после установления теплового равновесия в 16-м и 17-м отсеках установится температура 100ºС, и в них будут содержаться вода и пар, при этом пара будет m'=(24756 кДж–3360 кДж)/2260(кДж/кг)=9,4 кг, т.е. примерно 47%.

Ответ: «до» – в 16-м отсеке пар при 500ºС, в 17-м – лед при –173ºС

«после» – в 16-м и17-м отсеках вода и пар при 100ºС.

Рекомендации для проверяющих: при решении допускаются численные округления в разумных пределах.

Примечание: в качестве удельной теплоемкости льда приведено среднее арифметическое значений теплоемкостей при 0ºС и –200ºС.

4. См. решение задачи 7-3.

9 класс

1. В соответствии с законом сложения скоростей скорости тракторов относительно пилота $\vec{v}'_{1,2} = \vec{v}_{1,2} - \vec{u}$, где $v_{1,2}$ – скорости тракторов относительно земли, u – скорость вертолета. Соответствующие геометрические построения приведены на рис. 11. Тогда видно, что искомый угол γ=β–α, причем tgα=v_1/u, tgβ=v_2/u. Учитывая, что углы α и β малы, получаем γ=0,1≈6º

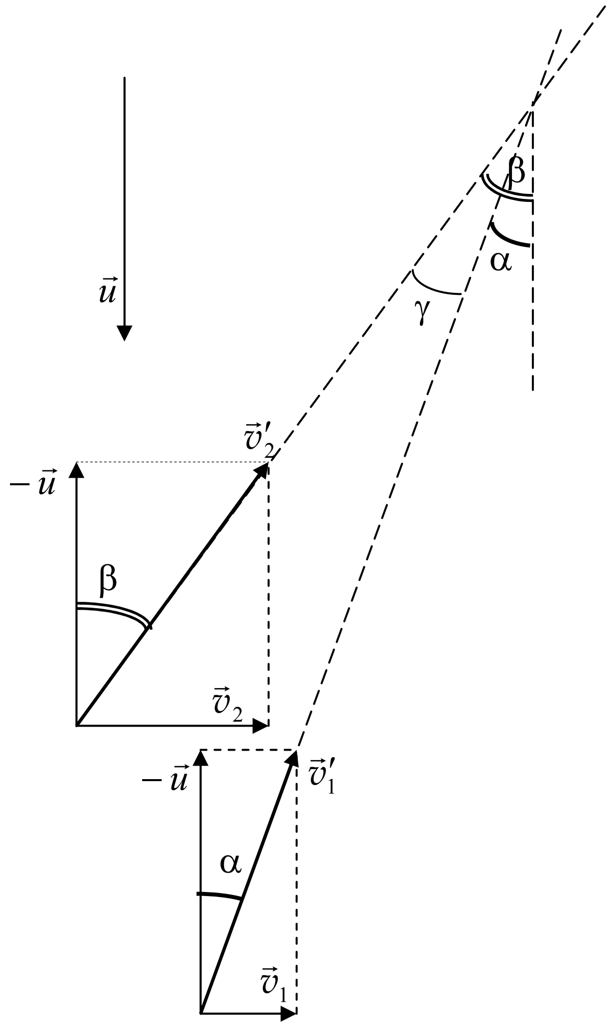

Рис. 11

Ответ: примерно 6º

2. Объем вытесненной воды (закрашен темно-серым на рис. 12) можно рассчитать по формуле $V_{выт} = \pi\frac{D-d}{2}\frac{D+d}{2}(L-l)$≈4270 мм^3, где D=18 мм и d=16 мм – диаметры пробирок, L=*115* мм – глубина погружения плавающей пробирки, l=35 мм – первоначальный уровень воды, соответственно вес вытесненной воды $P_{выт}=g\rho V_{выт}$.

Сила Архимеда рассчитывается как вес воды в объеме погруженной части либо как сила гидростатического давления на дно плавающей пробирки: $F_{арх}=g\rho\pi d^2L/4$. Тогда их отношение $\frac{F_{арх}}{P_{выт}}=\frac{\pi d^2 L}{4V_{выт}}\approx 5$. Таким образом, приведенная в условии формулировка закона Архимеда в общем случае неверна. Она справедлива, только если жидкость налита в очень широкий сосуд и изменением ее уровня вследствие погружения тела можно пренебречь.

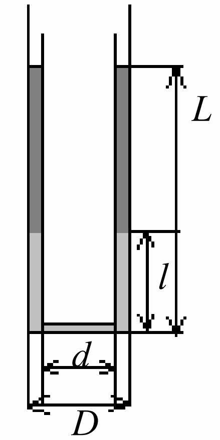

Рис. 12

Ответ: сила Архимеда больше примерно в 5 раз

Рекомендации для проверяющих: а) желательно при разборе еще раз обратить внимание участников на тот факт, что сила Архимеда возникает из-за разности гидростатических давлений, и наиболее общий способ ее вычисления – именно через разность сил гидростатического давления на верхнюю и нижнюю поверхности тела.

б) При расчете объема вытесненной воды возможны различные приближенные формулы (например, вместо второго сомножителя можно писать просто D либо d), расчет по любой из них следует считать правильным.

3. Пусть искомое время τ, массовый расход воды μ=1 г/с, масса залитой воды M=5 кг. Тогда время τ нагреватель сообщил воде тепло $Q=P\tau$, а масса вытекшей воды составила $m=\mu\tau$. Т.к. мы предполагаем, что температура воды увеличивается равномерно и вытекает вода также равномерно, то можно считать, что энергия, пошедшая на нагрев вытекшей воды, определяется выражением $Q_{выт}=0{,}5c\mu\tau(100^\circ C–20^\circ C)$, где коэффициент 0,5 и отвечает нашим предположениям. Тогда на нагрев оставшейся воды пошла энергия $Q_{ост}=Q–Q_{выт}=$ $=c(M–\mu\tau)$ $(100^\circ C–20^\circ C)$. Из получившегося уравнения находим $\tau=\frac{cM\Delta T}{P+\frac{1}{2}c\mu\Delta T}\approx$ $\approx$9 минут. Тогда объем оставшейся воды примерно 4,5 литра.

Ответ: примерно 9 минут, 4,5 литра.

Комментарий для преподавателей:

Приведем точное решение этой задачи, учитывающее нелинейный рост температуры вследствие изменения массы нагреваемой воды.

Уравнение теплового баланса в дифференциальной форме

$$Pdt=c(M-\mu t)dT$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем зависимость температуры в самоваре от времени $\frac{M}{M-\mu t}=e^{\frac{\mu c}{P}(T-T_0)}$, или $t=\frac{M}{\mu}(1-e^{-a})$, где введено обозначение $a=\frac{\mu c}{P}(T-T_0)$. Для приведенных в условии задачи данных $a\approx$0,11.

Подсчитаем теперь, как и в приближенном решении, количество теплоты, пошедшее на нагрев вытекшей воды. Оно определяется соотношением

$$Q_{\text{выт}} = Pt - c(M - \mu t)(T - T_0) = \frac{PM}{\mu} - (\frac{PM}{\mu} + cM(T - T_0)e^{-a}.$$

Далее учтем, что $e^{-a} \approx 1 - a + \frac{a^2}{2}$, тогда после преобразований получаем

$Q_{\text{выт}} \approx \frac{1}{2}\frac{c^2 M\mu}{P}(T - T_0)^2(1 - a)$. В то же время можно, опять раскладывая экспоненты в ряд, записать, что $Pt = \frac{M}{\mu}(1 - e^{-a}) \approx Mc(T - T_0)(1 - a)$. Тогда $Q_{\text{выт}} \approx \frac{1}{2}\frac{c^2 M\mu t}{Pt}(T - T_0)^2(1 - a) = \frac{1}{2}c\mu t(T - T_0)$, что совпадает с использованным в условии задачи выражением. Интересно, что это выражение справедливо *во втором* порядке малости по величине *a*. Т.к. $a \approx 0{,}11$, то погрешность при расчете по использованной формуле составит чуть более процента, т.к. будет весьма мала.

4. Обозначим токи так, как показано на рис. 13.

Выразим общее сопротивление цепи через сопротивления R и r: $R_o = R_1 + \frac{(R_2 + R_4)R_3}{(R_2 + R_4) + R_3} = \frac{11}{4}r$, откуда находим r=5 кОм.

Теперь проанализируем токи. Ток I_0 разветвляется на токи I_1 и I_2, причем токи в параллельных ветвях I_1 и I_2 относятся обратно пропорционально сопротивлениям ветвей, то есть $\frac{I_1}{I_2} = \frac{3}{1}$. Идеальный вольтметр показывает значение падения напряжения на сопротивлении r: $V_r = I_2 r = 2{,}9$ В. Отсюда можно получить соотношение: $I_2 = \frac{2{,}9}{r}$, тогда $I_1 = 3\frac{2{,}9}{r}$. Окончательно получаем: $I_1 = 3\frac{2{,}9 \cdot 11}{4R_o} = 1{,}74$ мА.

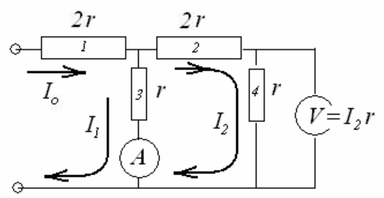

Рис.13

Ответ: 1,74 мА.

5. Масса тела связана с его объемом: $M = \rho V$. Объем тела связан с его размерами через некоторый коэффициент пропорциональности. Например, объем куба связан с длиной L одного из ребер как $V = L^3$, а объем прямоугольного параллелепипеда можно выразить произведением длины, ширины и высоты. Длина, высота и ширина человека не являются произвольными, а связаны между собой некоторыми коэффициентами подобия. Например, их можно выразить через высоту человека: $V = H \cdot k_1 H \cdot k_2 H \sim H^3$. В результате можно записать $M \sim \rho H^3$ или $M = \alpha\rho H^3$, где α – некоторый неизвестный коэффициент. Рассуждая таким же образом, можно выразить и площадь поверхности: $S \sim H^2$ или $S = \beta H^2$. *(Столь подробные рассуждения необязательны. Если в работе написано, что объем человека пропорционален кубу его линейного размера, а площадь – квадрату, это тоже абсолютно правильное решение.)* Сопоставляя полученные соотношения, видим, что если возвести в квадрат обе части первого соотношения, то в него войдет куб площади: $M^2 \sim S^3$, отсюда $S = k\sqrt[3]{M^2}$.

Таким образом, искомое соотношение получено. Осталось уточнить значение общего коэффициента пропорциональности. Будем выражать все значения физических величин в единицах СИ, тогда коэффициент будет иметь размерность м^{2}кг$^{-2/3}$. Найдем его численное значение, используя приведенные в условии данные. По ним получим: $k_1 \approx 0{,}104$; $k_2 \approx 0{,}106$; $k_3 \approx 0{,}107$. Таким образом, в качестве искомого вполне можно взять среднее значение $k \approx 0{,}105$ (или просто $k \approx 0{,}1$), при этом формула будет давать примерные значения площади тела по известной массе без учета особенностей, присущих отдельным типам телосложений. Эта формула называется формулой Мия.

Ответ: Искомая формула $S = 0{,}1\sqrt[3]{M^2}$, где M – в килограммах, S – в квадратных метрах.

Рекомендация для проверяющих: если значение коэффициента пропорциональности оценивается только по одной паре из условия, снимать 1 балл.

10 класс

1. Т.к. вертикальной составляющей ускорения нет, то полное время полета вследствие включения двигателя не изменится и будет равно времени свободного падения с высоты 1000 км: $t_{полн} = \sqrt{\dfrac{2H}{g}} \approx 510$ с, а дальность полета без включения двигателя составила бы $l_0 = v_0 t_{полн} \approx 3060$ км.

К моменту включения двигателя ракета пролетит $v_0 \cdot 240$ с=1440 км. В результате включения двигателя в течение 100 с движение ракеты по горизонтали равноускоренное с ускорением 0,01 км/с^2, поэтому за эти 100 с она пройдет $l_1 = v_0 \cdot 100 + 0{,}01 \cdot (100)^2/2 = 650$ км и по окончании работы двигателя будет иметь горизонтальную скорость $v_1 = v_0 + 0{,}01 \cdot 100 = 7$ км/с. Оставшиеся 510–340=170 с ракета движется с постоянной горизонтальной скоростью и проходит за это время 1190 км. Вычисляя общую дальность полета, получаем, что за счет включения двигателя она увеличилась на 220 км.

Ответ: на 220 км.

Комментарий: приведенное значение g=7,7 м/с^2 – это эффективное значение ускорения свободного падения: при его использовании полное время полета совпадает с результатом расчета с учетом изменения g с высотой. В то же время стоит отметить, что при точном расчете не меньший вклад дадут поправки, связанные с сопротивлением воздуха.

2. При отсутствии вращения вала сила ***mg***, действующая на груз вертикально вниз, уравновешивается силой реакции спицы ***F***, направленной строго вверх, при этом горизонтальная составляющая результирующей силы равна нулю. При наличии вращения сила ***F***, действующая на груз, изменяется (теперь она обозначена ***F′***), и поворачивается, образуя угол β с вертикалью. Это приводит к появлению горизонтальной составляющей $F'\sin\beta$, которая и создает нормальное ускорение груза $a_n = \omega^2 L Sin\alpha$, поэтому: $m\omega^2 L Sin\alpha = F' Sin\beta$ (1).

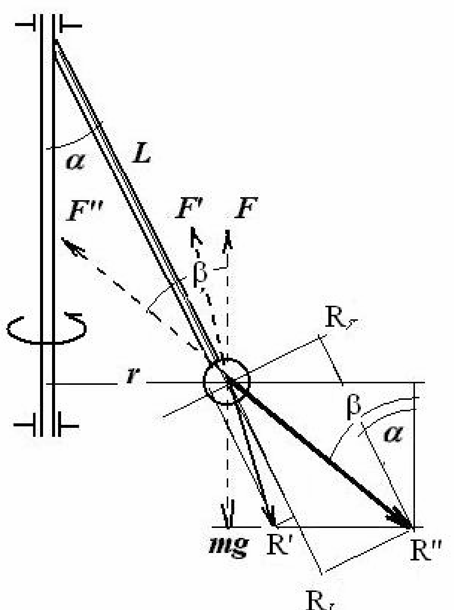

Рис. 14

Эта горизонтальная составляющая силы F увеличивается с увеличением угловой скорости вращения, тогда как ее вертикальная составляющая остается неизменной:

$mg = F' Cos\beta$ (2).

На рис. 14 изображены два значения силы ***F′*** и ***F′′*** при различных угловых скоростях вращения. Видно, что угол наклона вектора силы увеличивается и в некоторый момент становится равным углу наклона спицы (β=α).

По третьему закону Ньютона сила, действующая на конец спицы (обозначим ее ***R***), равна силе ***F*** по модулю, но направлена в противоположную сторону. Эту силу удобно разложить на две составляющие: $R_L = F' Cos\alpha$, действующая вдоль стержня (растягивающая) и $R_\tau = F' Sin\alpha$ – действующая поперек стержня (отгибающая).

Видно, что при увеличении частоты вращения продольная составляющая силы реакции монотонно увеличивается. Когда сила реакции действует вдоль спицы (β=α), она имеет лишь растягивающую составляющую, а поперечная составляющая изменяет свой знак: от прижимающей стержень к оси – до отгибающей. При этом максимальное значение прижимающей силы равно $R_\tau = mgSin\alpha$ при ω=0. Далее сила уменьшается до нуля (β=α) и начинает действовать в сторону отгибания стержня, увеличиваясь неограниченно, реально – до разрушения стержня.

Из геометрии видно, что поперечная (отгибающая) сила: $F_\tau = F' Sin(\beta - \alpha)$, (3), а продольная (растягивающая): $F_L = F' Cos(\beta - \alpha)$ (4)

Теперь перейдем к ответам на вопросы задачи.

Значение модуля силы F' найдем из соотношения (2): $F' = \dfrac{mg}{Cos\beta}$, а значение угла β можно определить из (1) и (2) $\beta = arctg(\dfrac{\omega^2 L Sin\alpha}{g})$. Отсюда, используя (3), получаем ответ на первый вопрос задачи:

$$F_\tau = \frac{mg}{\cos\beta}\sin[\beta - \alpha] = mg\sin\alpha(1 - \frac{\omega^2 L}{g}\cos\alpha).$$

Ответ на второй вопрос получается из условия F_τ=0: $\omega = \sqrt{\frac{g}{L\cos\alpha}}$

Ответ: $F_\tau = mg\sin\alpha(1 - \frac{\omega^2 L}{g}\cos\alpha)$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{L\cos\alpha}}$

3. Чтобы нагреть воду в одном отсеке на 1ºС, нужно сообщить ей 2,5·1·4200=10,5 кДж энергии, т.е. примерно в 10^7 раз больше, чем «квант» тепла в 1 мДж, сообщенный клетке А1. Перенумеруем *черные* клетки в порядке обхода (т.е. клетка А1 имеет номер 1, С1 – номер 2 и т.д.), тогда *n*-я черная клетка получает 2^{n-1} мДж тепла. Т.к. $2^{10} \gtrsim 10^3$, то $2^{24} \gtrsim 10^7$, поэтому черной клетке с номером 24 (т.е. Н6) сообщают 2^{23}·1мДж=8,388 кДж, и температуры всех клеток с А1 по Н7 (в т.ч. и белых, т.к. для охлаждения рассуждения аналогичны) будут отличаться менее, чем на 1ºС от 50ºС. Клетке же с номером 25 (А7) сообщают 2^{24}·1мДж=16,777 кДж, и в результате ее температура повысится на 1,6ºС, а температура клетки В7 понизится на 1,6ºС. Соответственно в клетках С7, Е7, G7 и Н8 температура будет выше 50ºС на 3,2ºС, 6,4ºС, 12,8ºС, 25,6ºС, а в клетках D7, F7, Н7 и G8 – ниже на 3,2ºС, 6,4ºС, 12,8ºС, 25,6ºС соответственно. Таким образом, во всех отсеках с А1 по G8 будет вода. Клетке F8 сообщают 2^{29}·1мДж=536,87 кДж энергии, этого хватит на нагрев до 100ºС и испарение части воды, поэтому в клетке F8 будут вода и пар при 100ºС. Аналогично у клетки Е8 отнимают 536,87 кДж энергии, поэтому в ней будут вода и лед при 0ºС. Клетке D8 сообщают 2^{30}·1мДж=1073,74 кДж. На нагрев воды до 100ºС требуется 525 кДж, на полное испарение всей воды – еще 5650 кДж, поэтому вся вода испариться не сможет и в клетке D8 будут вода и пар при 100ºС. Точно также вода и пар при 100ºС будут в клетке В8, которой сообщают 2^{31}·1 мДж=2147,50 кДж. Чтобы заморозить всю воду в одном отсеке, необходимо отобрать 830 кДж энергии, поэтому в клетке С8, у которой отбирают 1073,74 кДж энергии, вся вода не замерзнет (с учетом затрат на ее охлаждение) и в ней будет температура 0ºС. А в клетке А8, у которой отбирают 2147,50 кДж, вся вода замерзнет, а образовавшийся лед охладится до –233ºС.

Ответ: в клетках А1–G8 – вода, в клетках F8, D8, В8 – вода и пар, Е8, С8 – вода и лед, А8 – лед. Минимальная температура –233ºС (А8), максимальная – 100ºС (F8, D8, В8). Наборы клеток с близкими температурами: А1–Н7 (около 50ºС). F8, D8, В8 – 100ºС, Е8, С8 – 0ºС. .

Примечание: в качестве удельной теплоемкости льда приведено среднее арифметическое значений теплоемкостей при 0ºС и –200ºС.

4. Если *U* напряжение на зажимах источника, то при подключении одного вольтметра по цепи идет ток $I_1 = \frac{U}{R + R_V}$. Тогда показания первого вольтметра составят $U_1 = I_1 R_V = \dfrac{UR_V}{R + R_V}$. При параллельном подключении двух одинаковых вольтметров $R_{V\text{экв}} = \dfrac{R_V}{2}$ и их показания будут равны

$U_2 = \dfrac{U\,R_V/2}{R + R_V/2} = \dfrac{UR_V}{2R + R_V}$. Представим полученные уравнения в виде:

$$\frac{U}{U_1} = 1 + \frac{R}{R_V},$$

$$\frac{U}{U_2} = 1 + 2\frac{R}{R_V}.$$

Исключив отношение неизвестных сопротивлений R/R_V, найдем напряжение источника: $U = \dfrac{U_1 \cdot U_2}{2U_2 - U_1} = \dfrac{40}{3} \approx 13{,}3$ В.

Ответ: 13,3 В

5. Построение изображения приведено на рис.15. Видно, что при расстоянии между зеркалами $2L$ первоначальное расстояние между изображениями равно $4L$. Пусть за время Δt зеркала сместились на $\Delta X = V\Delta t$ каждое. В результате расстояние между изображениями уменьшилось на $4\Delta X$. Значит, скорость сближения изображений в 4 раза больше скорости сближения зеркал. Таким образом, для достижения скорости сближения изображений 5м/с зеркала необходимо сдвигать со скоростью 1,25м/с

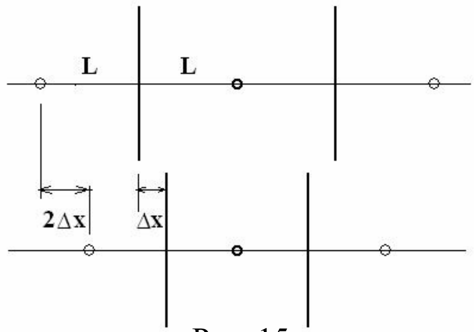

Рис. 15

Ответ: 1,25 м/с

11 класс

1. Направим ось X в направлении движения бруска, а начало координат поместим в начало шероховатого участка. Пусть масса бруска m, длина его части, в данный момент находящейся на шероховатом участке – Δx. Тогда действующая на него сила трения скольжения $F_{тр} = \mu g \dfrac{m}{l}\Delta x$. Далее возможны 2 существенных случая.

а) $l<L$. Тогда график зависимости силы трения от координаты переднего конца бруска имеет вид, изображенный на рис. 16а), а максимальное значение силы трения равно μmg (когда весь брусок находится на шероховатом участке).

б) $l>L$. В этом случае график имеет вид рис. 16б), а максимальное значение силы трения $\mu mgL/l$.

В обоих случаях работа силы трения вычисляется как площадь под графиком и равна $A=-\mu mgL$. . Тогда по теореме об изменении кинетической энергии

$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgL$, откуда $v = \sqrt{v_0^2 - 2\mu gL}$, соответственно максимальная скорость, при которой брусок не преодолеет участка $v_{min} = \sqrt{2\mu gL}$. Интересно, что результат не зависит от длины бруска. Поэтому такой же результат получится, если рассматривать просто движение материальной точки через шероховатый участок. Вместе с тем нельзя считать такое решение правильным.

Ответ: $v = \sqrt{v_0^2 - 2\mu gL}$, $v_{min} = \sqrt{2\mu gL}$.

Указание: если рассмотрен только один из двух случаев а) и б), но в остальном решение верное, рекомендуется оценивать его в 6 или 7 баллов.

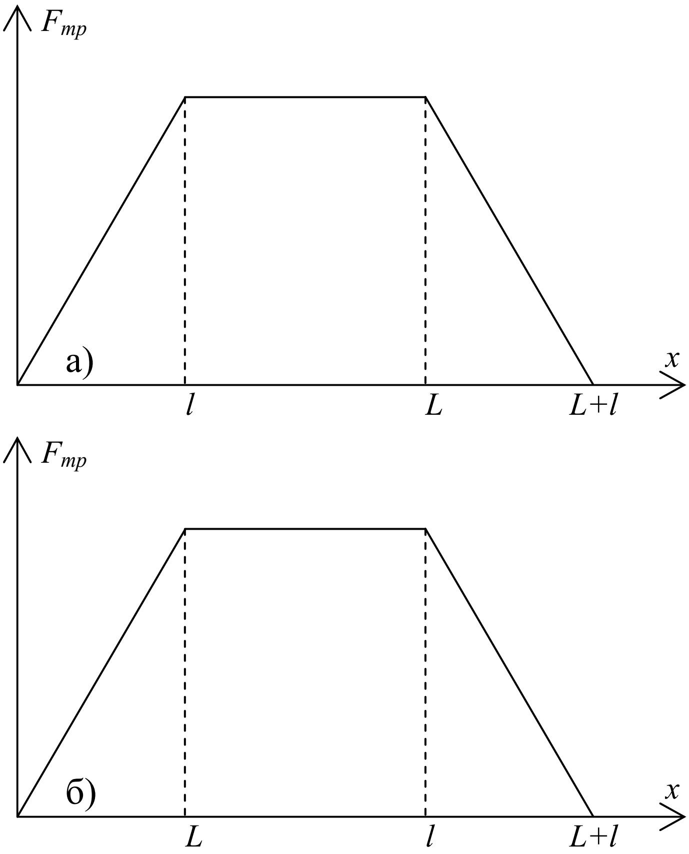

Рис. 16

2. Понятно, что в процессе 1–2 изменяется количество газа, т.к. если бы оно не изменялось, то в соответствии с законом Гей-Люссака давление было бы прямо пропорционально температуре, что не выполняется.

Запишем уравнения состояния для каждой из точек:

Точка 1: $4p_0V_1 = \nu_1 RT_0$, откуда $V_1 = \frac{\nu_1 RT_0}{4p_0}$

Точка 2: $p_0V_1 = 4\nu_2 RT_0$, или $p_0 \frac{\nu_1 RT_0}{4p_0} = 4\nu_2 RT_0$, откуда находим отношение количеств вещества в начале и конце процесса 1-2: $\nu_2 = \frac{\nu_1}{16}$

Точка 3: $p_0V_3 = \nu_2 RT_0$, или $p_0V_3 = \frac{\nu_1 RT_0}{16}$, или $V_3 = \frac{\nu_1 RT_0}{16p_0} = \frac{V_1}{4}$.

Точка 1′ (конечная точка процесса): $4p_0V_1' = \nu_2 RT_0$, или $V_1' = \frac{V_1}{16}$.

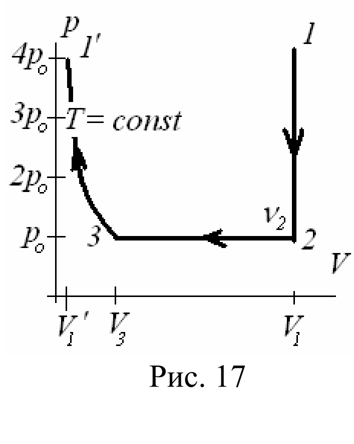

Рис. 17

График процесса в координатах (p,V) приведен на рис.17. Видно, что процесс незамкнутый, поэтому внутренняя энергия газа в начальном и конечном состояниях не совпадают за счет изменения количества вещества. Определим изменение внутренней энергии: $\Delta U = \frac{3}{2}RT_0(\nu_1 - \nu_2) = \frac{3}{2}\cdot\frac{15}{16}RT_0 = \frac{45}{32}RT_0$

Ответ: $\frac{45}{32}RT_0$

Комментарий: Задача иллюстрирует тот факт, что изменение внутренней энергии и изменение температуры не всегда пропорциональны друг другу. Другой иллюстрацией является задача о нагреве комнаты сообщением ей некоторого количества теплоты. В этой задаче масса газа тоже уменьшается – за счет условия постоянства давления (выравнивания давления через негерметично закрытую дверь), при этом температура воздуха в комнате повышается, а его внутренняя энергия остается прежней.

3. Сила натяжения пружины компенсирует суммарную кулоновскую силу отталкивания, действующую на два левых (или два правых) заряда со стороны двух правых (или двух левых) зарядов. С учетом того, что $F_{12} = F_{21}, F_{34} = F_{43}$, условие равновесия системы примет вид (ΔL – растяжение пружины): $F_{13} + F_{14} + F_{23} + F_{24} = T, \quad T = k\Delta L$.

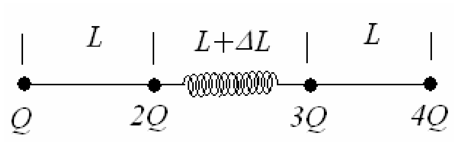

Рис. 18

Подставим значения обозначенных сил:

$$\frac{Q_1Q_3}{(2L+\Delta L)^2} + \frac{Q_1Q_4}{(3L+\Delta L)^2} + \frac{Q_2Q_3}{(L+\Delta L)^2} + \frac{Q_2Q_4}{(2L+\Delta L)^2} = k\Delta L \cdot 4\pi\varepsilon_0 \ (*)$$

Учтем правило приближенных вычислений:

$$\frac{Q_1Q_3}{4L^2}(1-2\frac{\Delta L}{2L}) + \frac{Q_1Q_4}{9L^2}(1-2\frac{\Delta L}{3L}) + \frac{Q_2Q_3}{L^2}(1-2\frac{\Delta L}{L}) + \frac{Q_2Q_4}{4L^2}(1-2\frac{\Delta L}{2L}) = k\Delta L \cdot 4\pi\varepsilon_0,$$

или $A - B\cdot\Delta L = k\Delta L \cdot 4\pi\varepsilon_0$, где $A = \frac{Q_1Q_3}{4L^2} + \frac{Q_1Q_4}{9L^2} + \frac{Q_2Q_3}{L^2} + \frac{Q_2Q_4}{4L^2} = \frac{331}{36}\frac{Q^2}{L^2}$,

$B = \frac{Q^2}{L^3}(\frac{1}{4} + \frac{2}{27} + \frac{2}{1} + \frac{1}{4}) = \frac{170}{108}\frac{Q^2}{L^3}$.

Отсюда находим $\Delta L = \dfrac{331\cdot L}{36(\frac{170}{108} + \frac{kL}{F_0})} \approx \frac{331\cdot L}{36\cdot 200} \approx \frac{L}{20}$, тогда $T \approx \frac{kL}{20} \approx 10F_0 \approx 100$Н.

Заметим, что значение удлинения пружины действительно получилось много (в 20 раз) меньше ее длины, поэтому использование правила приближенных вычислений для преобразования (*) корректно.

Ответ: 100 Н

4. Выделим два контура (2 и 3), как показано на рис. 19. Для них по второму закону Кирхгофа $U_3+RI_3–U_2=0$ (3 контур) и $U_2+RI_2–U_1=0$ (2 контур).

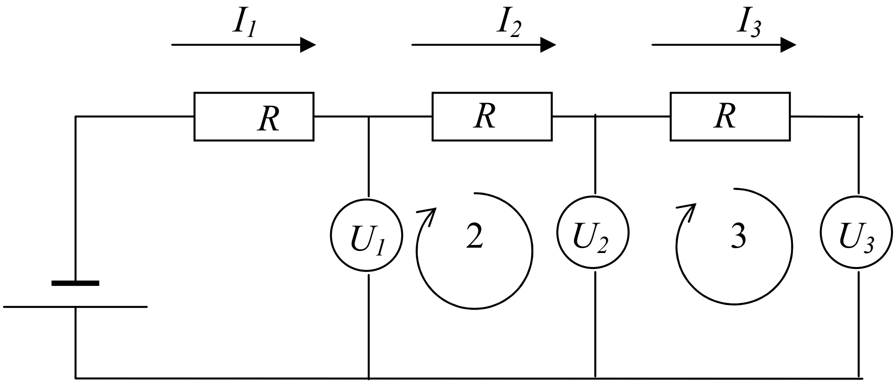

Рис.19

Тогда $\dfrac{U_2-U_3}{U_1-U_2}=\dfrac{I_3}{I_2}$ (*).

По закону Ома $I_3=\dfrac{U_3}{R_V}$. С другой стороны, по первому закону Кирхгофа $I_2=\dfrac{U_2}{R_v}+I_3$. Подставляя полученные соотношения в (*), получаем квадратное уравнение

$U_2^2+U_2U_3-U_3^2-U_1U_3=0$, откуда получаем $U_2≈8{,}65$ В.

Ответ: 8,65 В.

5. Построим изображение квадрата по правилам построения изображений в тонкой линзе (рис. 20): оно является трапецией. Обратите внимание, что ближе к линзе расположено изображение дальней от линзы стороны квадрата и наоборот.

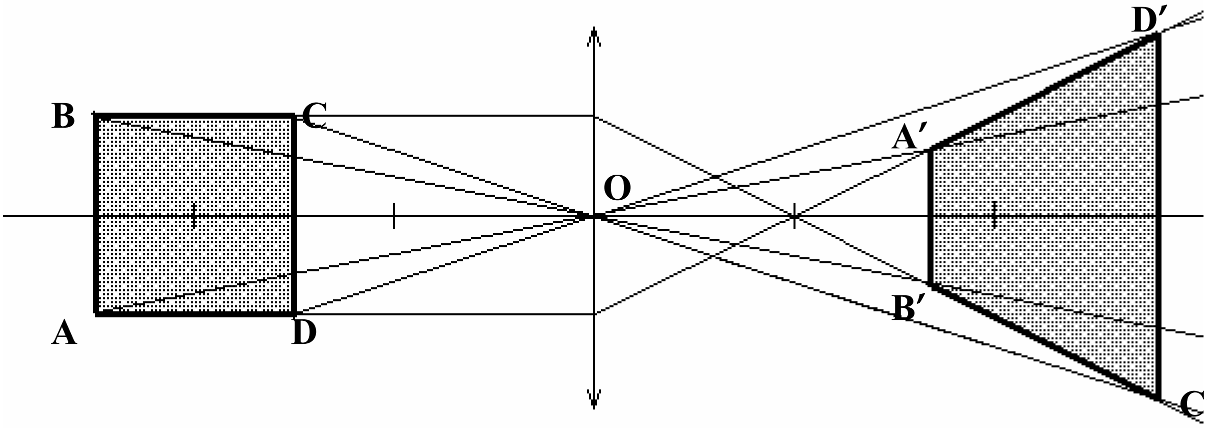

Рис. 20

Пусть x и y – расстояния от линзы до изображений сторон CD и AB квадрата соответственно. Тогда по формуле тонкой линзы $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\frac{3}{2}F}=\dfrac{1}{F}$, $x=3F$ и

$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{\frac{5}{2}F}=\dfrac{1}{F}$, $y=\dfrac{5}{3}F$. Из подобия треугольников CDO и C′D′O находим

C′D′=2F. Аналогично находим A′B′=2F/3. Тогда площадь изображения квадрата $S' = \frac{1}{2}\left(3F - \frac{5}{3}F\right)\left(2F + \frac{2}{3}F\right) = \frac{16}{9}F^2$, что больше площади квадрата в 16/9≈1,8 раза.

Ответ: в 16/9≈1,8 раза.

Рекомендация для проверяющих: правильное построение изображения без попыток расчета его площади оценивать в 4 балла.